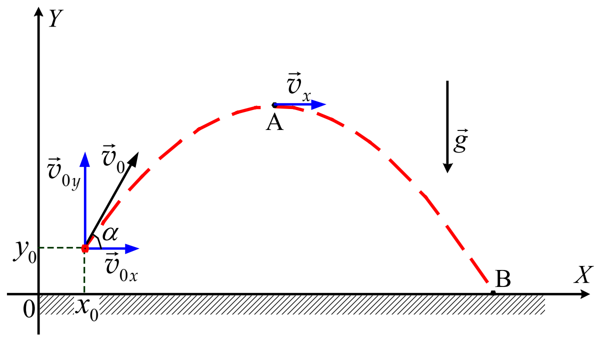
Урок 5. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Движение тела, брошенного под углом к горизонту



Рассмотрим движение тела, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0$. Спроецируем начальную скорость $\vec{v}_0$ и ускорение $\vec{a}$ камня на оси X и Y. Проекция начальной скорости на ось X равна $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$. Проекция ускорения $a_x = 0$, поскольку вектор $\vec{g}$ перпендикулярен оси X. Поэтому движение камня вдоль оси X будет равномерным. Проекция скорости v_x и координата x летящего камня определяются соотношениями:

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \qquad x = x_0 + v_0 t \cos\alpha$$

Проекция начальной скорости на ось Y равна $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$. Проекция ускорения $a_y = -g$, поскольку вектор $\vec{g}$ направлен противоположно оси Y. Поэтому вдоль оси Y движение камня равнопеременное. В этом случае проекция скорости v_y и координата y летящего камня задаются формулами:

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt, \qquad y = y_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Когда тело достигнет максимальной высоты подъема, проекция его скорости на ось Y будет равна нулю $v_y = 0$. Тогда время подъема до максимальной высоты $t_1 = v_0 \sin\alpha / g$. Подставляя это значение в уравнение для максимальной высоты подъема:

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Если тело брошено от земли ($y_0 = 0$), то общее время полета t_0 равно удвоенному времени подъема:

$$t_0 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

Дальность полета L камня определяется подстановкой времени полета t_0 в зависимость $x(t)$: $L = x_0 + v_0 t_0 \cos\alpha$. При $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$ дальность полёта равна

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Максимальная дальность полета для камня, брошенного с земли, достигается при угле бросания $\alpha = 45°$, поскольку в этом случае $\sin 2\alpha = 1$.

Уравнение траектории

Определим, по какой траектории движется брошенное тело, то есть найдем уравнение, связывающее между собой координаты тела по осям x и y. Для этого выразим время из зависимости $x(t)$:

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos\alpha}$$

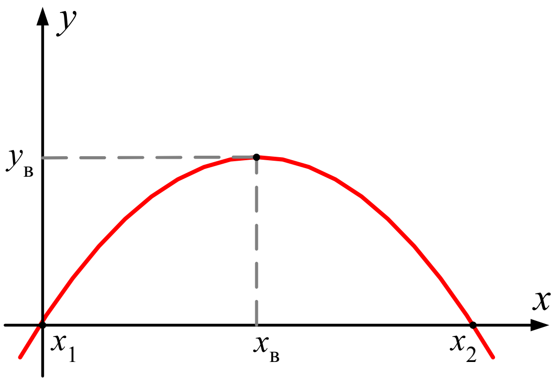
и подставим его в формулу для $y(t)$. Получаем квадратичную функцию $y(x)$:

$$y = y_0 + v_0\left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos\alpha}\right)\sin\alpha - \frac{1}{2}g\left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 = y_0 + (x - x_0)\operatorname{tg}\alpha - \frac{g(x - x_0)^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$$

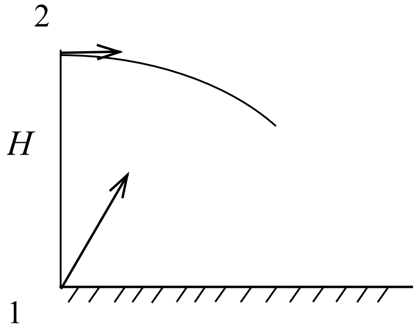
Если выбрать систему координат таким образом, что $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, то формула упрощается:

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$$

Графиком полученной функции $y = y(x)$ является парабола (см. рис.), направленная ветвями вниз и пересекающая ось x в точках $x_1 = 0$ (начало координат) и $x_2 = L = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Координаты вершины этой параболы равны $x_в = L/2$ и $y_в = h_{max} = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$.



Пример. Два тела брошены одновременно: одно с земли под углом к горизонту, а другое – горизонтально с высоты $H = 10$ м над землей. Вначале тела находились на одной вертикали, а через некоторое время столкнулись в полете (см. рис.). Известно, что если бы тела не столкнулись, то брошенное с земли тело пробыло бы в полете вдвое дольше другого. Найдите высоту, на которой произошло столкновение. Сопротивлением воздуха пренебречь.



Решение. Если бы тела не сталкивались, то время полета второго тела, брошенного горизонтально, было бы равно $t_2 = \sqrt{2H/g}$. При этом время полета первого тела было бы равно, согласно условию, $t_1 = 2t_2 = 2\sqrt{2H/g}$. С другой стороны, $t_1 = 2v_{0y}/g$, где v_{0y} – вертикальная составляющая начальной скорости первого тела. Находим, что $v_{0y} = \sqrt{2gH}$. В системе отсчета, связанной со вторым телом, первое равномерно приближается ко второму со скоростью v_{0y}, поэтому время от начала полета тел до их столкновения равно $t_{\text{ст}} = H/v_{0y}$. В земной системе отсчета уравнение движения первого тела имеет вид $h_1(t) = v_{0y}t - gt^2/2$, откуда находим, что столкновение тел происходит на высоте

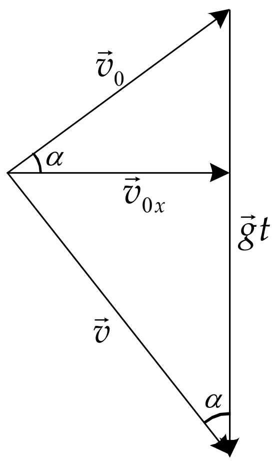
$$h_1(t) = v_{0y}t_{\text{ст}} - gt_{\text{ст}}^2/2 = \frac{3H}{4} = 7{,}5 \text{ м}.$$

Пример. Тело брошено под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с. Через какое время вектор скорости тела окажется перпендикулярен начальной скорости?

Решение. Запишем в векторном виде зависимость скорости свободно падающего тела от времени:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

Строим треугольник скоростей, учитывая, что по условию задачи $\vec{v} \perp \vec{v}_0$ (см. рис.)



По теореме Пифагора получаем, что $(gt)^2 = v^2 + v_0^2$. Отсюда выражаем искомое время:

$$t = \frac{\sqrt{v_0^2 + v^2}}{g}$$

Горизонтальная составляющая $\vec{v}_{0x}$ скорости тела не изменяется, поэтому из рисунка следует, что $v_0\cos\alpha = v\sin\alpha$, откуда $v = v_0\text{ctg}\alpha$. Подставляя это выражение, получаем ответ:

$$t = \frac{\sqrt{v_0^2 + v_0^2\text{ctg}^2\alpha}}{g} = \frac{v}{g}\sqrt{1 + \text{ctg}^2\alpha} = \frac{v}{g\sin\alpha}$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Тело брошено вдоль склона вниз под углом α к поверхности горы. Определить дальность полёта, если начальная скорость равна v_0, угол наклона горы β. Сопротивлением воздуха пренебречь.

[Ответ: $\dfrac{2v_0^2 \sin\alpha \cos(\alpha-\beta)}{g\cos^2\beta}$]

Задача 2. Пушка выстреливает ядро под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту со скоростью v = 100 м/с. Когда ядро достигает наивысшей точки траектории, пушка стреляет второй раз. Через какое время после первого выстрела ядра окажутся на минимальном расстоянии друг от друга (пока оба ядра в полете)? Чему равно это расстояние? Сопротивлением воздуха пренебречь.

[Ответ: $t = v\sin\alpha/(2g) \approx 4{,}42$ с, $L = v^2\cos\alpha\sin\alpha/g \approx 442$ м]