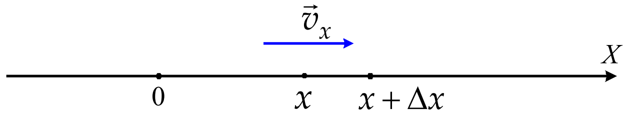
Урок 3. Неравномерное прямолинейное движение

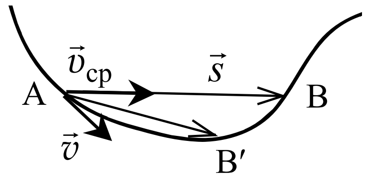
Мгновенная скорость

Рассмотрим случай, когда тело движется по прямой, но его движение не является равномерным. Например, автомобиль ускоряется или тормозит. Пусть в момент времени t тело находилось в точке с координатой x, а в момент времени $t+\Delta t$ – в точке с координатой $x+\Delta x$ (см. рис.).



Среднее значение проекции скорости точки в интервале от t до $t+\Delta t$ равно отношению $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$. Если теперь рассмотреть меньший промежуток времени Δt, то перемещение тела также будет меньше по модулю, а отношение $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ будет иметь какое-то другое значение. Если и дальше уменьшать промежуток времени Δt, то значение средней скорости на этом промежутке практически перестанет изменяться. Полученная величина является мгновенной проекцией скорости тела в момент времени t.

В общем случае изменяться может как *модуль*, так и *направление* вектора скорости. Например, скорость камня, брошенного под некоторым углом к горизонту изменяется как по модулю, так и по направлению.



Пусть тело (материальная точка) движется вдоль траектории, показанной на рисунке. В момент времени t тело находится в точке A, а в момент $t+\Delta t$ – в точке B. Найдем среднюю скорость тела в интервале от t до $t+\Delta t$, используя определение: $\vec{v}_{\text{ср}} = \vec{s}/\Delta t$. Направление вектора $\vec{v}_{\text{ср}}$ совпадает с направлением вектора перемещения $\vec{s}$. Будем теперь уменьшать величину Δt, при этом модуль вектора перемещения также станет уменьшаться, а его направление приближаться к направлению касательной к траектории в точке A. Вектор $\vec{v}$, к которому в пределе $\Delta t \to 0$ стремится средняя скорость $\vec{v}_{\text{ср}}$, называют *мгновенной скоростью* тела в точке A. В любой точке траектории тела мгновенная скорость (часто ее называют просто скоростью) направлена по касательной к траектории в данной точке.

Мгновенная скорость – это векторная величина, равная отношению перемещения тела $\Delta\vec{s}$ к промежутку времени Δt, в течение которого произошло это перемещение, при стремлении $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v} = \left.\frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}\right|_{\Delta t \to 0}$$

Равнопеременное движение

Самом простым видом неравномерного движения является *равнопеременное движение* – такое движение тела, при котором скорость тела за любые равные промежутки времени изменяется одинаково. Величина, характеризующая быстроту изменения скорости, называется ускорением.

Ускорение равнопеременного движения – это векторная величина, равная отношению изменения скорости к промежутку времени t, в течение которого это изменение произошло:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

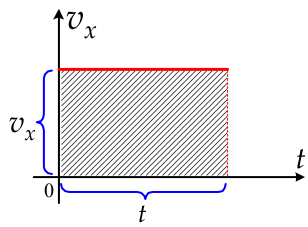
При этом если векторы скорости и ускорения точки имеют одинаковое направление ($\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{a}$), то движение называется *равноускоренным*. Если они имеют противоположное направление ($\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{a}$), то движение – *равнозамедленное*.

Если в начальный момент скорость тела была равна $\vec{v}_0$, то по определению ускорения скорость тела в момент времени t равна

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t\,.$$

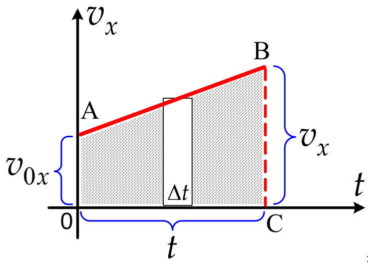
Перемещение, координата, средняя скорость при равнопеременном прямолинейном движении

При прямолинейном равномерном движении проекция v_x скорости – постоянная величина, а координата точки зависит от времени линейно: $x = x_0 + v_x t$. График функции $v_x(t)$ представляет собой горизонтальную прямую (см. рис.). Изменение координаты тела за промежуток времени от $t_0 = 0$ до t равно $s_x = \Delta x = v_x t$, то есть численно равно площади заштрихованного прямоугольника. Заметим, что изменение коорднаты – это и есть проекция перемещения тела: $\Delta x = s_x$.



В случае равнопеременного движения проекция v_x скорости тела линейно зависит от времени: $v_x(t) = v_{0x} + a_x t$, где v_{0x} – это проекция начальной скорости на ось X, a_x – проекция ускорения на эту ось (см. рис.). Рассмотир такой малый промежуток времени Δt, в течение которого скорость можно считать постоянной. Изменение координаты тела за этот промежуток численно равно площади белого прямоугольника на рисунке. Если разбить время движения t на много промежутков величиной Δt, то изменение координаты за все время t окажется численно равным сумме площадей большого количества прямоугольников. Эта сумма при разбиении на все большее число промежутков стремится к площади S заштрихованной трапеции OABC: $S = (\text{OA}+\text{BC})\cdot\text{OC}/2$. Тогда

$$\Delta x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \cdot t$$



=

Поскольку $v_x(t) = v_{0x} + a_x t$, то $\Delta x = \dfrac{v_{0x} + v_{0x} + a_x t}{2} \cdot t = v_{0x} t + \dfrac{a_x t^2}{2}$. Эта формула выведена для случая, когда $v_{0x} > 0$, $a_x > 0$, однако она справедлива и для произвольных знаков величин v_{0x}, a_x. Таким образом, получена зависимость координаты от времени (закон движения):

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$$

Координата точки зависит от времени не линейно, а по квадратичному закону. Графиком зависимости $x = x(t)$ является парабола. Если $a_x > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a_x < 0$ – то вниз.

Проекция средней скорости тела при равнопеременном движении

$$v_{\text{ср}\,x} = \frac{s_x}{t} = \frac{v_{0x} + v_x}{2}$$

равна среднему арифметическому начальной и конечной проекции скорости.

При решении многих задач полезна формула для перемещения, не содержащая времени t в явном виде. Из зависимости проекции скорости от времени $v_x(t) = v_{0x} + a_x t$ выразим время

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$$

и подставим в выражение для s_x:

$$s_x = \Delta x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \cdot \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$$

Задача. Двигаясь равноускоренно, за восьмую секунду после начала движения тело прошло путь $s = 15$ м. Найдите время, за которое тело прошло путь $l = 9$ м.

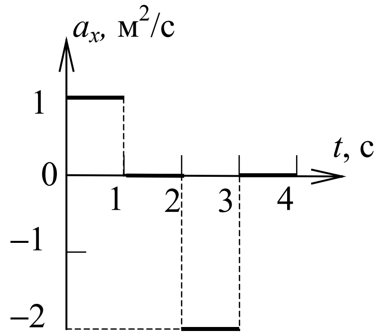
Решение. Обозначим ускорение тела через a, а промежуток времени в 1 секунду – через Δt. Так как начальная скорость тела равна нулю, то за время $t_7 = 7$ с тело прошло путь $L_7 = at_7^2/2$, а за время $t_8 = t_7 + \Delta t$ тело прошло путь $L_8 = a(t_7 + \Delta t)^2/2$. Тогда путь за 8-ую секунду равен $s = L_8 - L_7 = a\Delta t\,(t_7 + \Delta t/2)$, отсюда выражаем ускорение тела:

$a = \dfrac{s}{\Delta t(t_7 + \Delta t/2)} = 2$ м/с^2.

Путь l тело преодолеет за время t, такое что $l = at^2/2$, тогда искомое время $t = \sqrt{2l/a} = 3$ с.

Графики движения

Задача. На рисунке приведен график зависимости проекции ускорения материальной точки, движущейся вдоль оси OX, от времени. Постройте графики зависимости проекции скорости v_x, и координаты x от времени. Координата точки и её скорость в начальный момент равны нулю. Найдите среднюю скорость и среднюю величину скорости точки за все время движения.

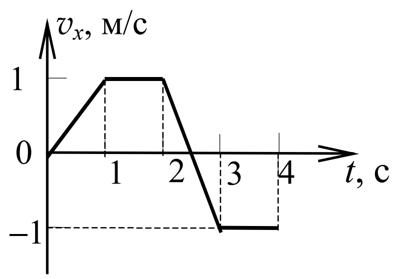


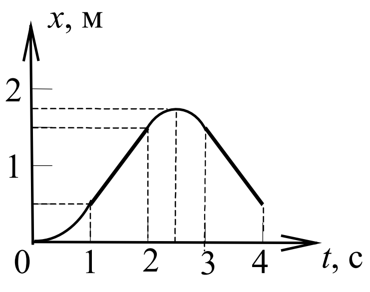
Решение. Обозначим через t_1, t_2, t_3 и t_4 моменты времени, соответствующие 1 с, 2 с, 3 с и 4 с от начала движения. В течение первой секунды движение тела равноускоренное, проекция ускорения $a_{x1} = 1$ м/с^2. Скорость меняется по линейному закону: $v_x = a_1 t$, в конце первой секунды $v_{x1} = 1$ м/с. Координата меняется по закону $x = a_{x1}t^2/2$, графиком функции $x(t)$ является участок параболы с вершиной, соответствующей $x_0 = 0$, при $t = 0$, координата в конце первой секунды $x_1 = 0{,}5$ м.

На второй секунде движение тела равномерное со скоростью v_1. На графике зависимости $v_x(t)$ такой участок изображается горизональным отрезком. Координата меняется по линейному закону: $x = x_1 + v_{x1}(t - t_1)$, в конце второй секунды $x_2 = x_1 + v_{x1}(t_2 - t_1) = 1{,}5$ м.

На третьей секунде тело движется с постоянным ускорением: $a_{x2} = -2$ м/с^2, скорость падает линейно за эту секунду от v_{x1} до $v_{x3} = -1$ м/с. Координата меняется по закону $x = x_2 + v_{x1}(t - t_2) + a_{x2}(t - t_2)^2/2$. Графиком функции $x(t)$ является участок параболы с вершиной, соответствующей $x = 1{,}75$ м при $t = 2{,}5$ с. В этот момент проекция скорости тела v_x равна нулю – тело поворачивает, касательная к графику функции $x(t)$ в этот момент горизонтальна. Координата в конце третьей секунды $x_3 = x_2 = 1{,}5$ м.

На четвертой секунде движение тела равномерное со скоростью $v_{x3} = -1$ м/с. Координата уменьшается по линейному закону: $x = x_3 + v_{x3}(t - t_3)$, в конце четвертой секунды $x_4 = x_3 + v_{x1}(t_4 - t_3) = 0{,}5$ м. Графики зависимостей $v_x(t)$ и $x(t)$ изображены ниже. Перемещение тела за все время движения $t_п = 4$ с равно $s_x = x_4 - x_0 = 0{,}5$ м. Среднее значение проекции скорости тела $(v_x)_{ср} = s_x/t_п = 0{,}125$ м/с.





Задачи для самостоятельного решения.

1. Тело из состояния покоя начинает двигаться с постоянным ускорением. Найти отношение расстояний, проходимых за последовательные равные промежутки времени.
   Ответ: [1:3:5:…].
2. На рисунке приведен график зависимости проекции ускорения материальной точки, движущейся вдоль оси OX, от времени. Постройте графики зависимости проекции скорости v_x, координаты x, а также пройденного точкой пути L от времени. Координата точки и её скорость в начальный момент равны нулю. Найдите среднюю скорость и среднюю величину скорости точки за все время движения.