

Урок 4. Свободное падение

Свободное падение тела по вертикали

Движение тела только под действием притяжения к Земле называется *свободным падением*. При этом действие на тело других сил, например, силы сопротивления воздуха, не учитывается. Вблизи поверхности Земли все тела имеют одинаковое ускорение свободного падения \vec{g} , направленное к центру Земли. Величина этого ускорения равна $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Свободное падение по вертикали представляет собой частный случай равнопеременного прямолинейного движения, для описания которого применимы соответствующие формулы (урок 1.3). Естественно использовать вертикальную ось координат Y , причем направление оси (вверх или вниз) и начало отсчета можно выбирать произвольно.

Рассмотрим движение тела, брошенного с высоты H вверх с начальной скоростью v_0 . Направим ось координат Y вертикально вверх, а начало отсчёта поместим на уровне земли. Тогда начальная координата камня равна H , проекция начальной скорости на ось Y равна v_0 , а проекция ускорения на эту ось равна $a_y = -g$. Запишем законы изменения проекции скорости v и координаты тела y при равнопеременном движении:

$$y(t) = H + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$
$$v(t) = v_0 - gt$$

Достигнув наибольшей высоты подъема, камень в некоторый момент $t_{\text{под}}$ остановится, а затем начнёт падать. Из условия равенства нулю скорости камня в этот момент времени: $v(t_{\text{под}}) = 0$, найдём время подъёма камня до максимальной высоты:

$$t_{\text{под}} = \frac{v_0}{g}$$

Высота наибольшего подъёма равна значению координаты $y(t)$ в момент времени $t_{\text{под}}$:

$$h_{\text{max}} = y(t_{\text{под}}) = H + v_0 t_{\text{под}} - \frac{gt_{\text{под}}^2}{2} = H + \frac{v_0^2}{2g}$$

Найдём теперь полное время полета тела до падения на землю t_0 . В момент падения координата тела станет равной 0: $y(t_0) = 0$. Отсюда получаем квадратное уравнение относительно t_0 :

$$H + v_0 t_0 - \frac{gt_0^2}{2} = 0$$

Это уравнение имеет два корня, но физический смысл имеет только один из них (время не может быть отрицательным). Тогда время, через которое тело упадёт на землю, равно:

$$t_0 = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}}$$

Скорость камня в момент падения равна $v_{\text{пад}} = v(t_{\text{пад}}) = v_0 - gt_{\text{пад}}$. Подставляя найденное значение времени падения, находим:

$$v_{\text{пад}} = -\sqrt{v_0^2 + 2gH}$$

Знак «минус» в полученном выражении указывает на то, что вектор скорости камня в момент его падения на направлен вниз, противоположно выбранному направлению оси Y .

Задача. Камень, брошенный вертикально вверх с поверхности Земли, побывал на высоте h дважды с интервалом времени Δt . Найти начальную скорость камня.

Решение. Направим координатную ось y вертикально вверх, начало отсчёта поместим на уровне земли. Начальную скорость обозначим через v_0 . Координата y тела изменяется со временем t по закону

$$y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Если тело оказывается в момент времени t на высоте h , то $y(t) = h$. Получаем уравнение относительно t :

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

или

$$gt^2 - 2v_0 t + 2h = 0$$

Решая последнее уравнение, находим корни t_1 и t_2 :

$$t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}, \quad t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$$

Интервал времени Δt между этими двумя моментами

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$$

Из последнего соотношения выразим искомую начальную скорость камня:

$$v_0 = \sqrt{\left(\frac{g\Delta t}{2}\right)^2 + 2gh}$$

Относительное движение свободно падающих тел

Рассмотрим два тела, которые одновременно находятся в свободном падении, двигаясь по вертикальной оси Y , направленной вверх. Пусть в момент времени $t = 0$ проекции их скоростей равны v_{01} и v_{02} , а координаты равны y_{01} и y_{02} , соответственно. Тогда проекции скорости тел изменяются со временем по закону:

$$v_{1y} = v_{01} - gt, \quad v_{2y} = v_{02} - gt.$$

Перейдем в систему отсчета, связанную со вторым камнем. Проекция скорости первого камня в этой системе отсчета равна:

$$v_{\text{отн } y} = v_{1y} - v_{2y} = v_{01} - v_{02}.$$

Таким образом, относительная скорость тела не изменяется со временем, и его движение является равномерным.

Можно показать, что этот вывод справедлив не только для движения тел вдоль одной прямой, но и для произвольного движения свободно падающих тел.

Задача. С башни вертикально вверх с интервалом времени τ брошены два камня с одинаковой начальной скоростью v_0 . Через какое время после начала полёта первого камня они столкнутся?

Решение. Решим задачу двумя способами: в системе отсчета земли и в системе отсчета второго камня.

Способ 1. Направим ось y вверх, начало координат выберем на уровне земли, а время t будем отсчитывать от начала полёта первого камня. Высоту башни обозначим через H_0 . Тогда зависимость $y(t)$ для первого и второго камня имеет вид:

$$y_1 = H_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$y_2 = H_0 + v_0(t - \tau) - \frac{g(t - \tau)^2}{2}$$

В момент столкновения $y_1 = y_2$, или

$$H_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} = H_0 + v_0(t - \tau) - \frac{g(t - \tau)^2}{2}$$

Из полученного уравнения находим искомое время t_0 , через которое камни столкнутся:

$$t_0 = \frac{2v_0 + g\tau}{2g}$$

Способ 2. Направим ось y вверх, а начало координат свяжем со вторым камнем. Высота, на которой находился первый камень в момент бросания второго, равна $H_1 = v_0\tau - g\tau^2/2$, а его скорость относительно земли в этот момент равна $v_1 = v_0 - g\tau$. Время t будем отсчитывать от момента броска первого камня.

Вспользуемся тем, что относительное движение двух тел, находящихся в свободном падении, является равномерным. Запишем закон движения первого камня относительно второго:

$$y_1(t) = H_1 + v_{\text{отн}}(t - \tau)$$

Здесь $v_{\text{отн}}$ – проекция скорости первого камня относительно второго: $v_{\text{отн}} = v_1 - v_0 = -g\tau$. В момент столкновения t_0 координата первого камня станет равной нулю: $y_1(t_0) = 0$, или $H_1 = g\tau(t_0 - \tau)$, откуда находим искомое время

$$t_0 = \frac{2v_0 + g\tau}{2g}$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Тело падает без начальной скорости с высоты H над землей. Найти среднюю скорость падения на первой и второй половине пути.

$$[\text{Ответ: } v_{\text{ср1}} = \frac{\sqrt{gH}}{2}; v_{\text{ср2}} = \frac{\sqrt{gH}}{2(\sqrt{2}-1)}.]$$

2. С вертолётa, поднимающегося вертикально вверх со скоростью v_0 , на высоте h над землёй отпускают груз. Через какое время груз упадёт на землю? Какова будет при этом его скорость?

$$[\text{Ответ: } t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}, v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} .]$$